

Operations Research.

Chapter 4: Bài toán tối ưu mạng - Network Optimisation models

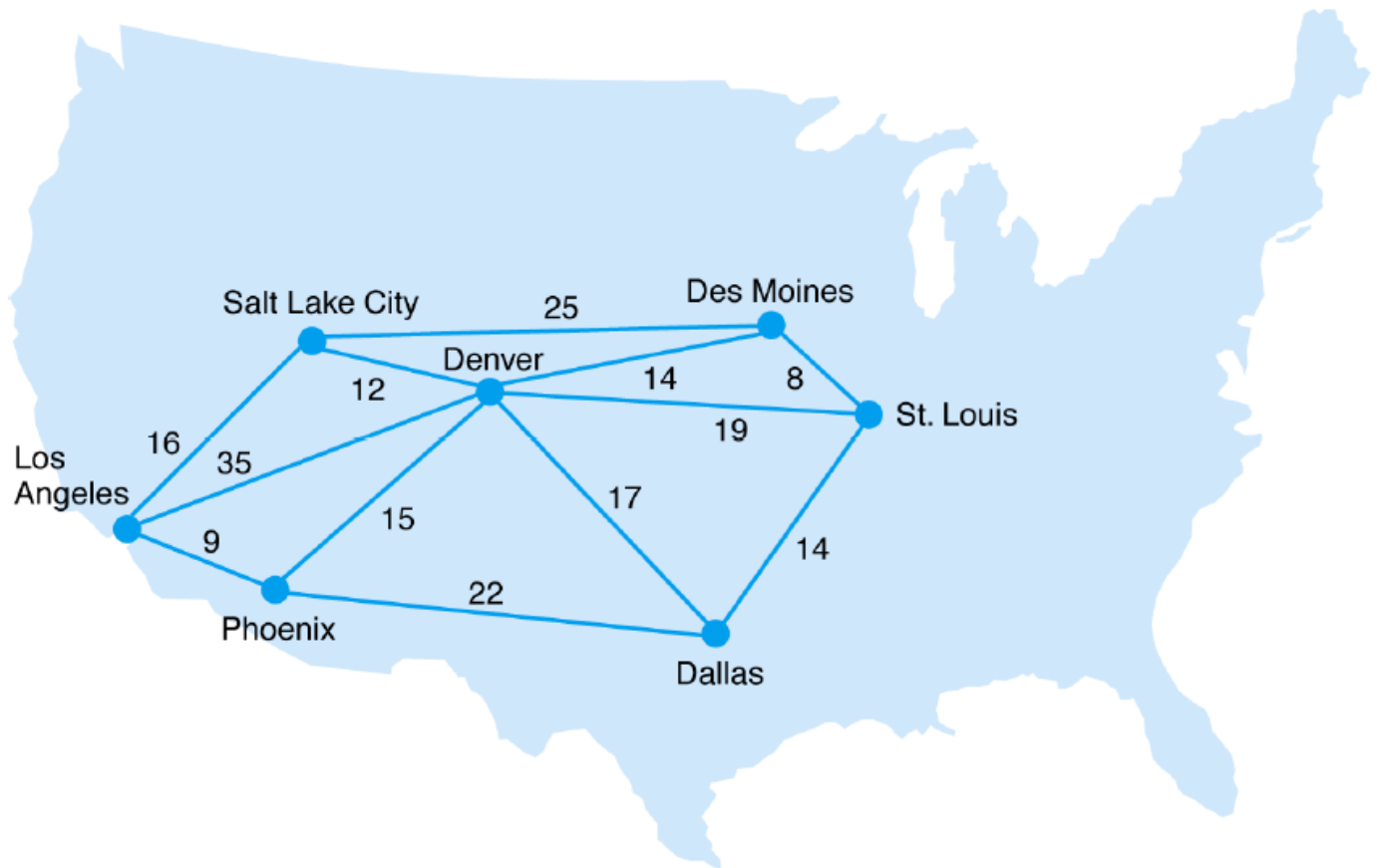
Dr. Hà Văn Hiếu

University of Economics and Law

16th November 2020



Mạng - Network - Examples

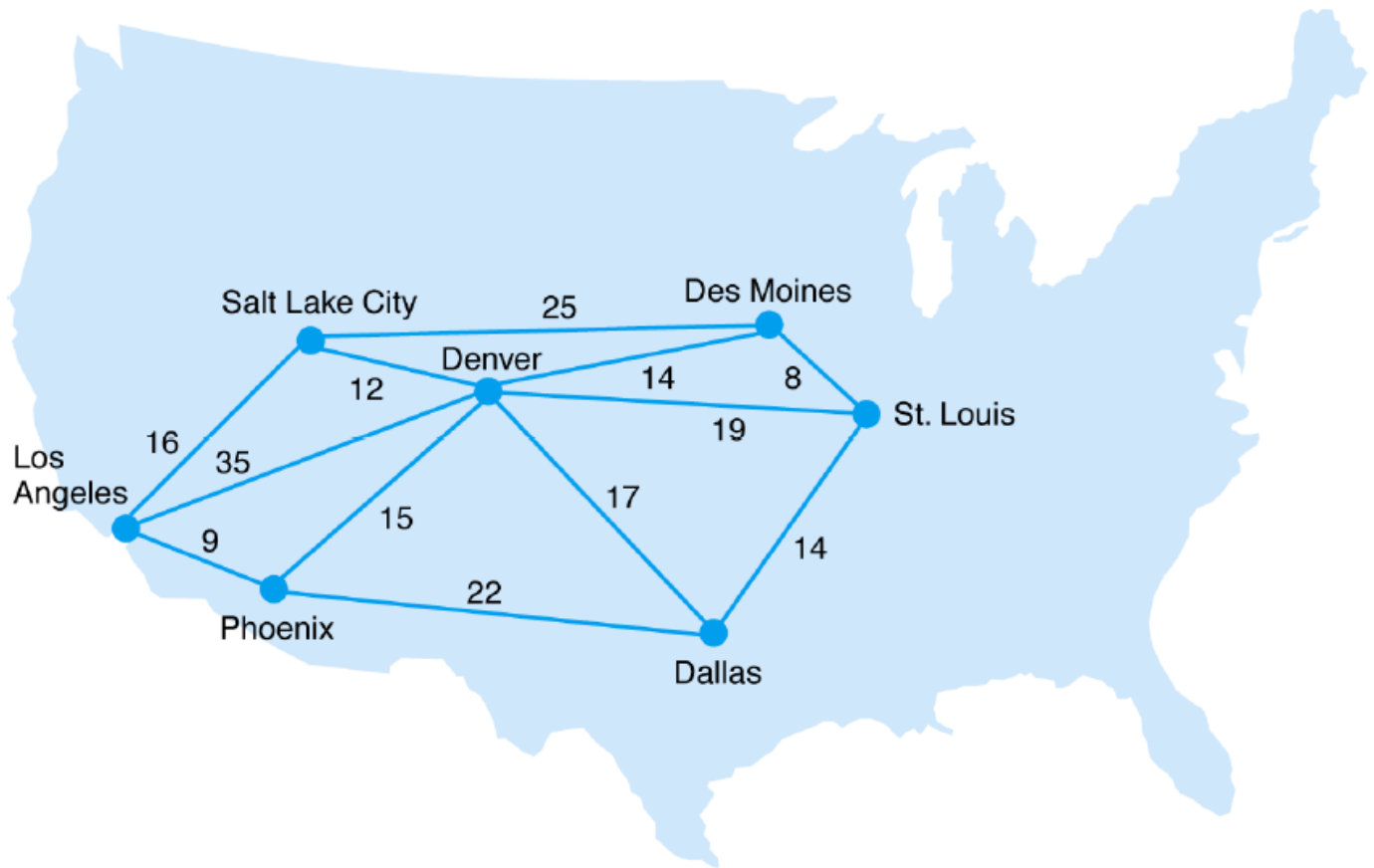


Tìm đường đi ngắn nhất từ cảng Los Angeles đến các cảng khác.

Sơ đồ mạng

- Sơ đồ mạng gồm các **nodes** (nốt, điểm, vertices) và các **arcs** (đường đi).
- Trên các arcs (nhánh, đường đi, edges) (directed or undirected) biểu diễn mối quan hệ giữa các node.
- Một network là directed nếu như tất cả các arc là directed. Và một network là undirected nếu tất cả các arc là undirected.

Shortest path problem - Example



Tìm đường đi ngắn nhất từ cảng Los Angeles đến St. Louis.

Shortest path problem - Example

- 1 Xác định điểm bắt đầu. Đưa vào tập tối ưu. Kí hiệu là A_0
- 2 Chọn node có lộ trình **ngắn nhất** từ điểm bắt đầu. Đưa vào tập tối ưu. Kí hiệu là A_1 .
- 3 Chọn node có lộ trình **ngắn nhất** xuất phát từ tập tối ưu ở bước 2 và đưa vào tập tối ưu. Kí hiệu là A_2 .
- 4 Lặp lại các bước 2 và 3 cho đến khi đạt tối ưu.

Shortest path problem - Example

| n | Tập T.Ư. | Gần nhất | Khoảng cách | Last connection |
|-----|-------------|----------|-------------|-----------------|
| 0 | Los Angeles | Phoenix | 9 | L-P |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Shortest path problem - Example

| n | Tập T.U. | Gần nhất | Khoảng cách | Last connection |
|-----|-------------|----------------|-------------|-----------------|
| 0 | Los Angeles | Phoenix | 9 | L-P |
| 1 | Los Angeles | Salt Lake City | 16 | L-S |
| | Phoenix | Denver | $9+15=24$ | L-P-Den |
| | | | | |
| | | | | |

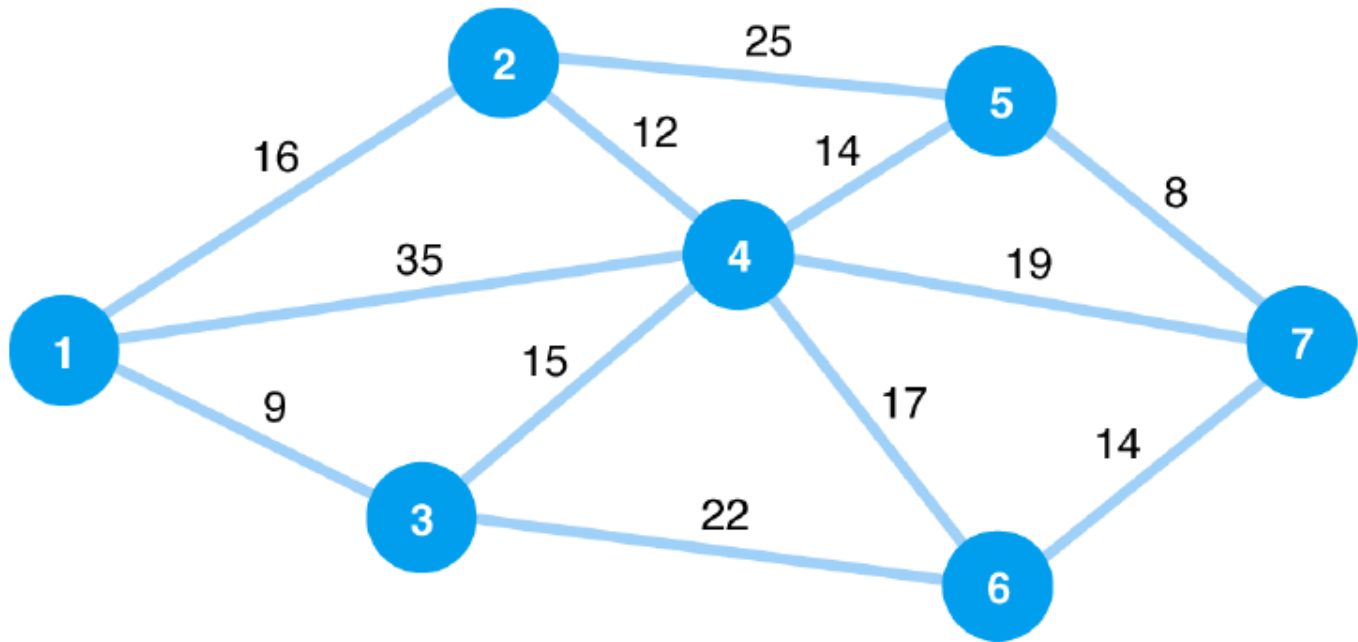
Shortest path problem - Example

| n | Tập T.U. | Gần nhất | Khoảng cách | Last connection |
|-----|----------------|----------------|-------------|-----------------|
| 0 | Los Angeles | Phoenix | 9 | L-P |
| 1 | Los Angeles | Salt Lake City | 16 | L-S |
| | Phoenix | Denver | $9+15=24$ | L-P-Den |
| 2 | Los Angeles | | | |
| | Phoenix | Dallas | $9+22=31$ | L-P-Dal |
| | Salt Lake City | Des Moines | $16+25=41$ | L-Salt-Des |
| | Denver | Des Moines | $24+14=38$ | L-P-Den-Des |
| | | | | |

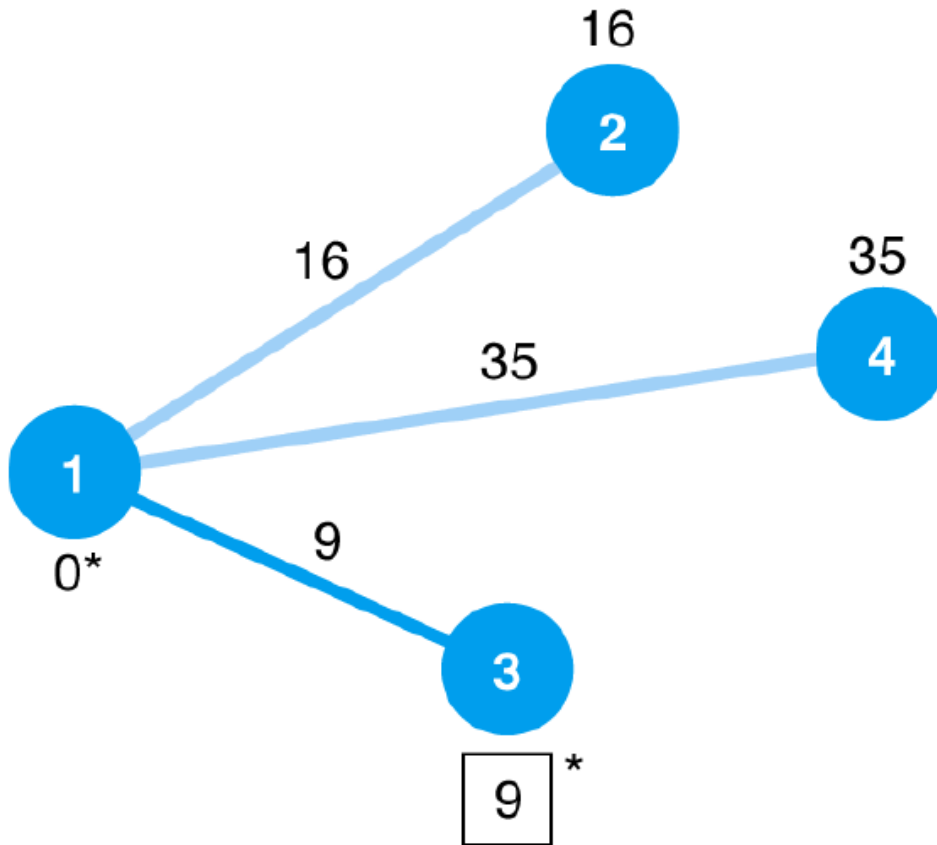
Shortest path problem - Example

| n | Tập T.Ư. | Gần nhất | Khoảng cách | Last connection |
|-----|-----------------|-----------------|--------------------|------------------------|
| 0 | Los Angeles | Phoenix | 9 | L-P |
| 1 | Los Angeles | Salt Lake City | 16 | L-S |
| | Phoenix | Denver | $9+15=24$ | L-P-Den |
| 2 | Los Angeles | | | |
| | Phoenix | Dallas | $9+22=31$ | L-P-Dal |
| | Salt Lake City | Des Moines | $16+25=41$ | L-Salt-Des |
| | Denver | Des Moines | $24+14=38$ | L-P-Den-Des |
| 3 | Denver | St. Lois | $24+19=43$ | L-P-Den-St.Lois |
| | Dallas | St. Lois | $31+14=44$ | L-P-Dallas-St. Lois |
| | Des Moines | St. Lois | $38+8=46$ | L-P-Den-Des-St.Lois |

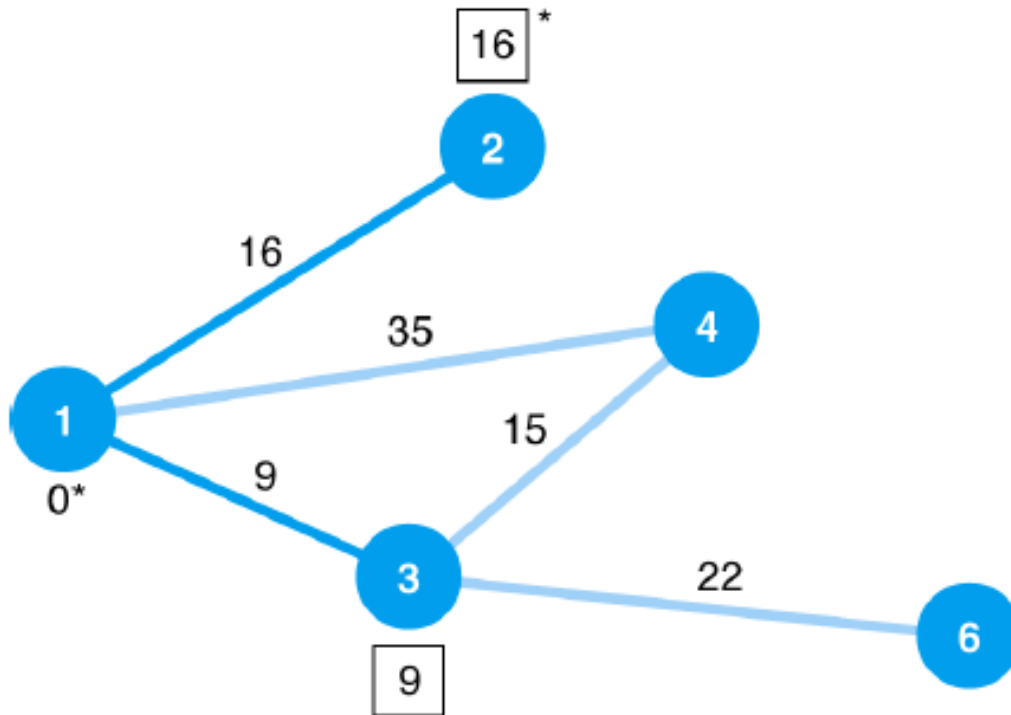
Shortest path problem - Example



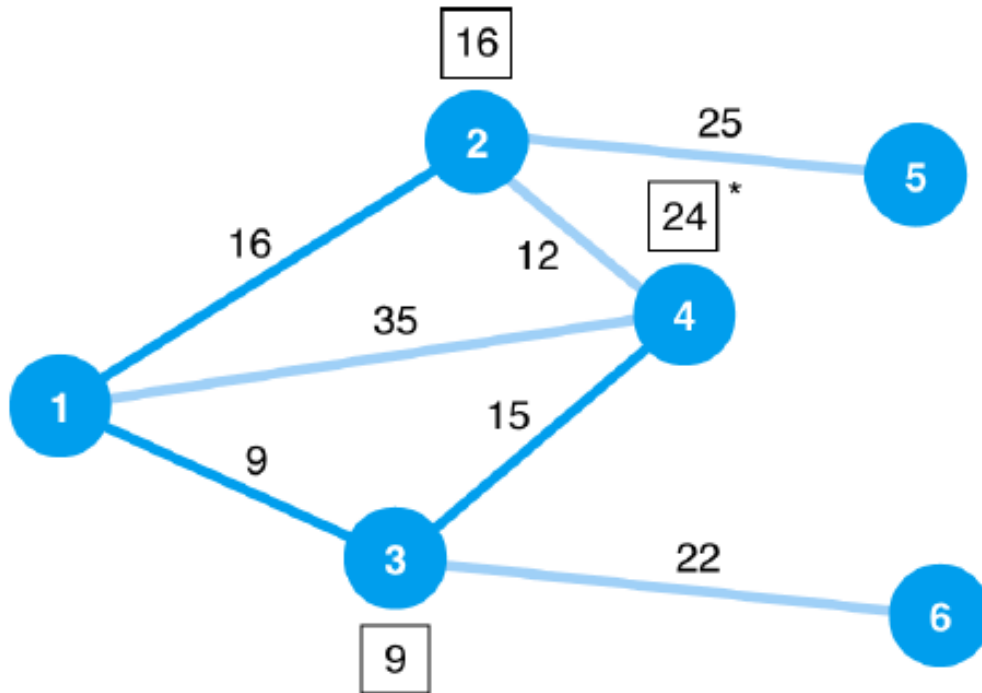
Shortest path problem - Example



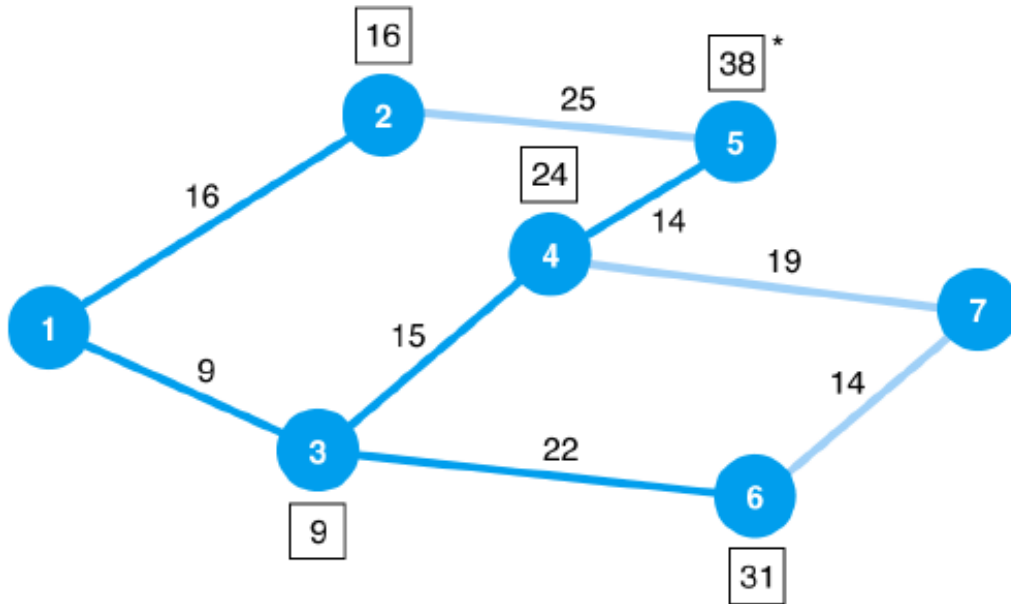
Shortest path problem - Example



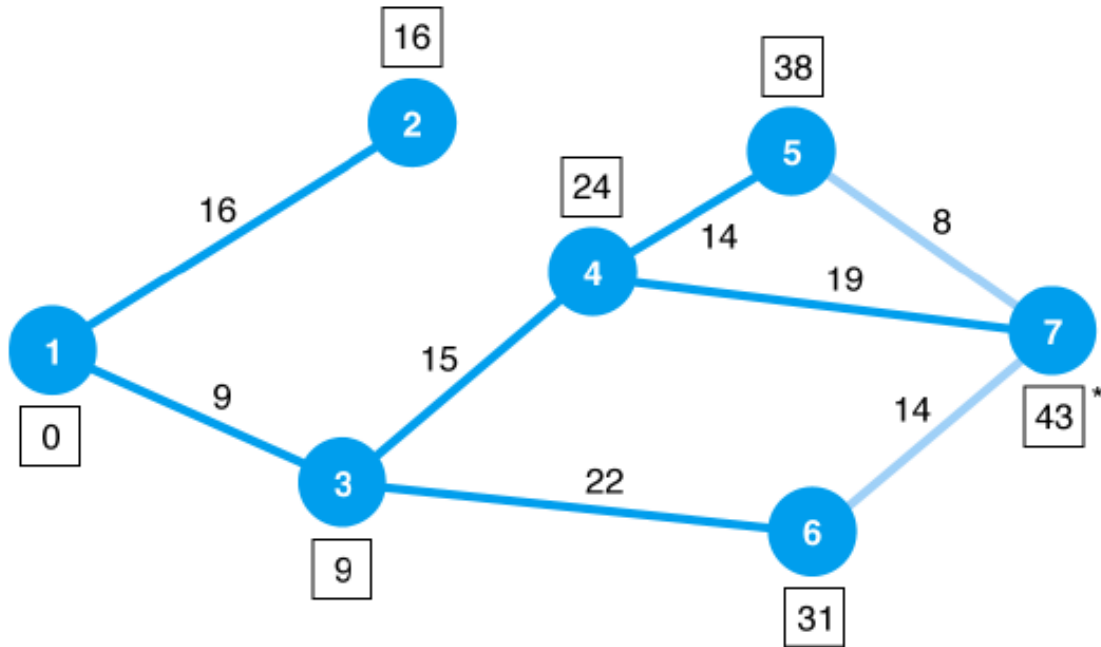
Shortest path problem - Example



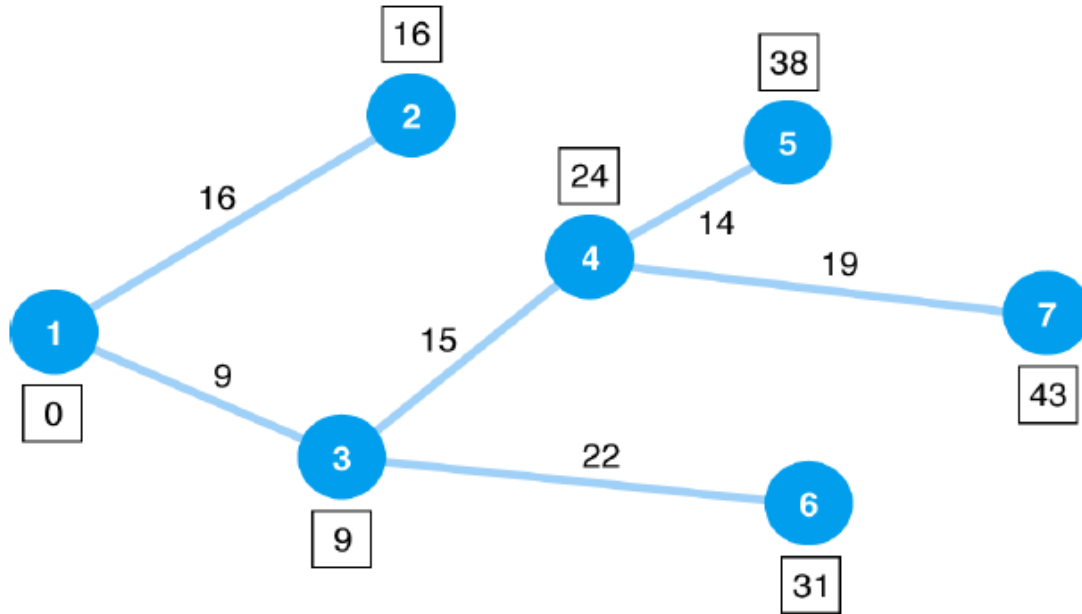
Shortest path problem - Example



Shortest path problem - Example



Shortest path problem - Example



Linear Programming model

Let's denote

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if arc } ij \text{ is included} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

We need to minimize

$$\begin{aligned} & 16x_{12} + 9x_{13} + 35x_{14} \\ + & 12x_{24} + 25x_{25} \\ + & 15x_{34} + 22x_{36} \\ + & 14x_{45} + 17x_{46} + 19x_{47} \\ + & 8x_{57} + 14x_{67} \end{aligned}$$

Linear Programming model

- Một đường đi (path) ngắn nhất xuất phát từ node 1 chỉ có thể đi qua một và chỉ một trong các node 2, 3, 4 do đó

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

- Nếu đường đi ngắn nhất qua edge 12 thì nó phải tiếp tục qua một và chỉ một trong 2 edges 24, 25 nên

$$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$$

- Nếu đường đi ngắn nhất không qua edge 12 thì nó cũng không qua edge 24, 25 nên ta cũng vẫn có

$$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$$

Linear Programming model

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$$

- Tương tự cho x_{13}

$$x_{13} - x_{34} + x_{36} = 0$$

- Nếu đi qua node 4, thì một và chỉ một trong 3 edges 24, 34, 14 là bằng 1, và lúc đó một và chỉ một trong 3 edges 45, 46, 47 là bằng 1, nghĩa là

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - (x_{45} + x_{46} + x_{47}) = 0$$

- Nếu không đi qua node 4, thì các edge xuất phát hay đi tới node 4 đều không được đi qua, nghĩa là ta cũng có:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - (x_{45} + x_{46} + x_{47}) = 0$$

Linear Programming model

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$$

$$x_{13} - x_{34} + x_{36} = 0$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - (x_{45} + x_{46} + x_{47}) = 0$$

- Tương tự cho node 5, 6.

$$x_{25} + x_{45} - x_{57} = 0$$

$$x_{36} + x_{46} - x_{67} = 0$$

- Vì node 7 là đích đến nên:

$$x_{47} + x_{57} + x_{67} = 1$$

Linear Programming model

Minimize $16x_{12} + 9x_{13} + 35x_{14} + 12x_{24} + 25x_{25} + 15x_{34} + 22x_{36} + 14x_{45} + 17x_{46} + 19x_{47} + 8x_{57} + 14x_{67}$
subject to

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$$

$$x_{13} - x_{34} + x_{36} = 0$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - (x_{45} + x_{46} + x_{47}) = 0$$

$$x_{25} + x_{45} - x_{57} = 0$$

$$x_{36} + x_{46} - x_{67} = 0$$

$$x_{47} + x_{57} + x_{67} = 1$$

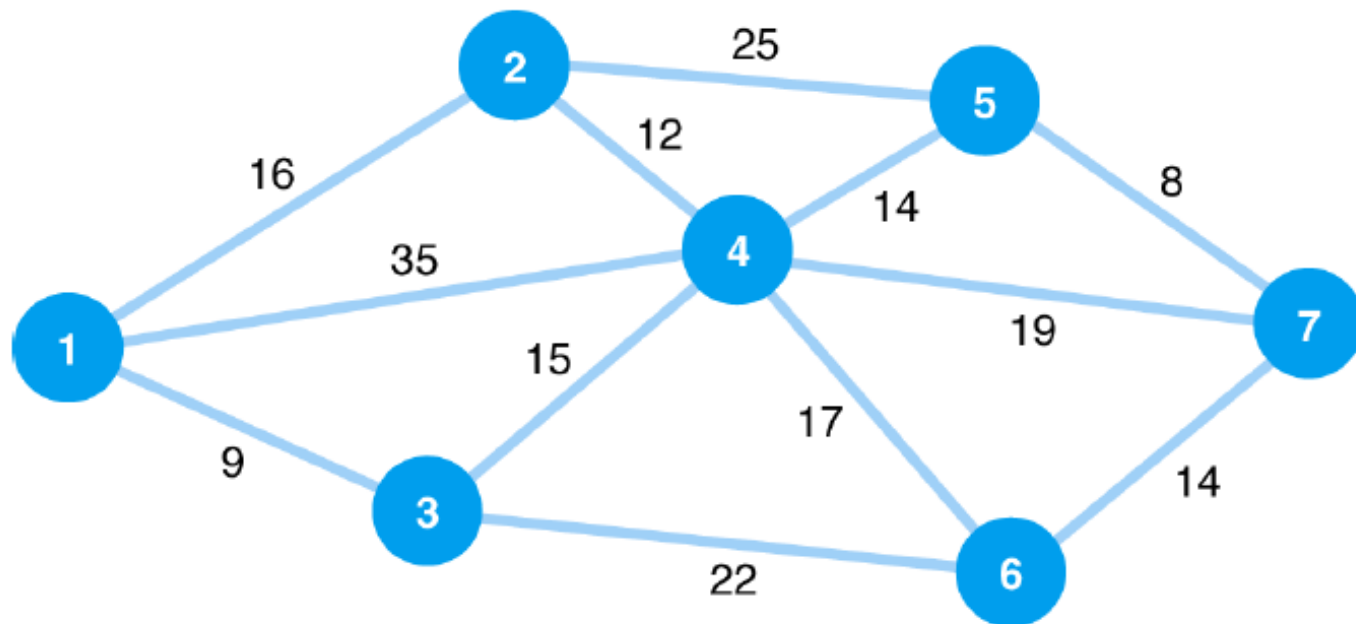
$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1$$

Shortest path problem - Applications

- ① Tối thiểu hóa quãng đường di chuyển.
- ② Tối thiểu hóa tổng chi phí của một chuỗi các hoạt động.
- ③ Tối thiểu hóa tổng thời gian của một chuỗi các hoạt động.

Mô hình cây cực tiểu (Minimum spanning tree problem)

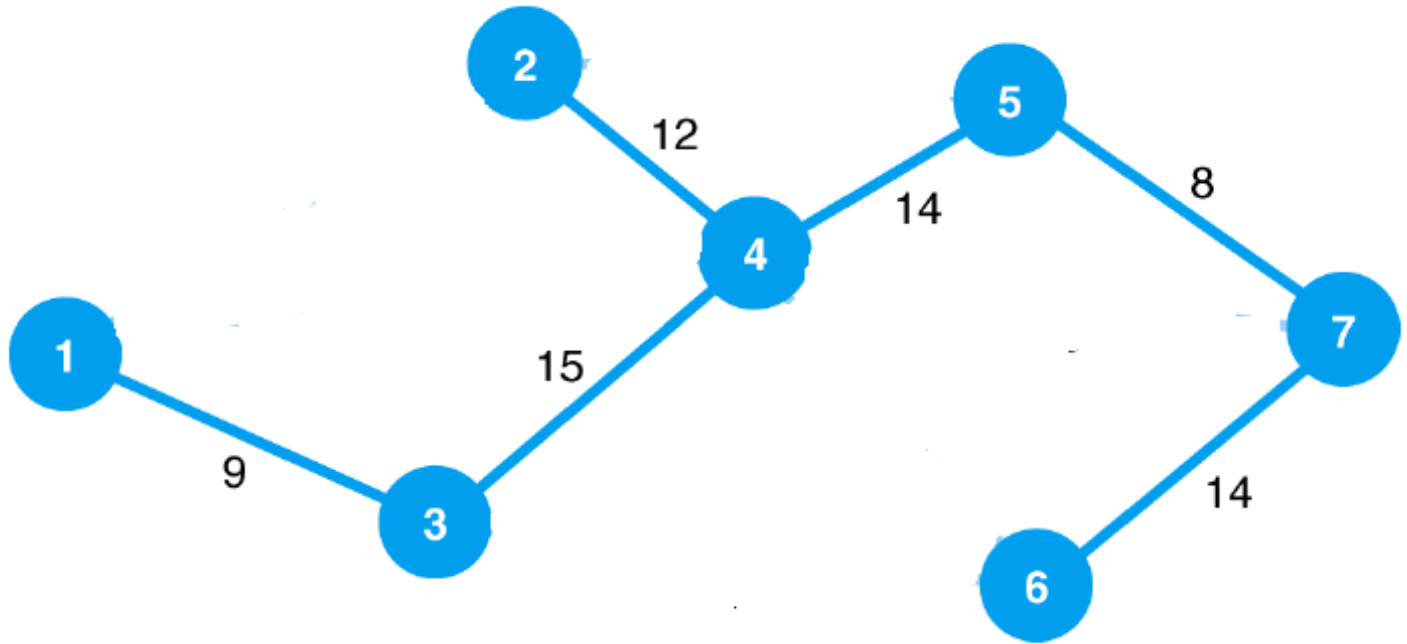
- Tìm đường đi qua tất cả các node của mạng sao cho cực tiểu tổng chiều dài đường đi.



Mô hình cây cực tiểu

- Xuất phát từ một node (ví dụ node 1).
- Chọn node gần nhất đến node 1. Ở đây là node 3. Đường đi 13.
- Chọn node gần nhất đến một trong 2 nodes là 1, 3. Ở đây là node 4. Đường đi 134.
- Chọn node gần nhất đến một trong 3 nodes là 1, 3, 4. Ở đây là node 2. Đường đi 1342.
- Chọn node gần nhất đến một trong 4 nodes 1, 3, 4, 2. Ở đây là node 5. Đường đi 1342, 45.
- Chọn node gần nhất đến một trong 5 nodes 1, 3, 4, 2, 5. Ở đây là node 7. Đường đi 1342, 457.
- Chọn node gần nhất đến một trong 6 nodes 1, 3, 4, 2, 5, 7. Ở đây là node 6. Đường đi 1342, 4576.

Mô hình cây cực tiểu

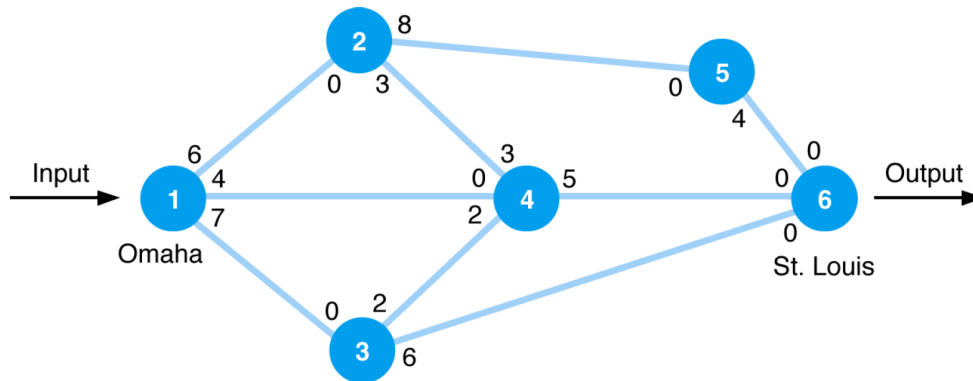


The Minimum Spanning Tree problem - Applications

- 1 Design of telecommunication networks (fiber-optic networks, computer networks, leased-line telephone networks, cable television networks, etc.)
- 2 Design of a lightly used transportation network to minimize the total cost of providing the links (rail lines, roads, etc.)
- 3 Design of a network of high-voltage electrical power transmission lines.
- 4 Design of a network of wiring on electrical equipment (e.g., a digital computer system) to minimize the total length of the wire.
- 5 Design of a network of pipelines to connect a number of locations.

Mô hình lưu lượng cực đại (the Maximum Flow problem)

- Cực đại hóa lưu lượng từ một điểm bắt đầu đến một đích.

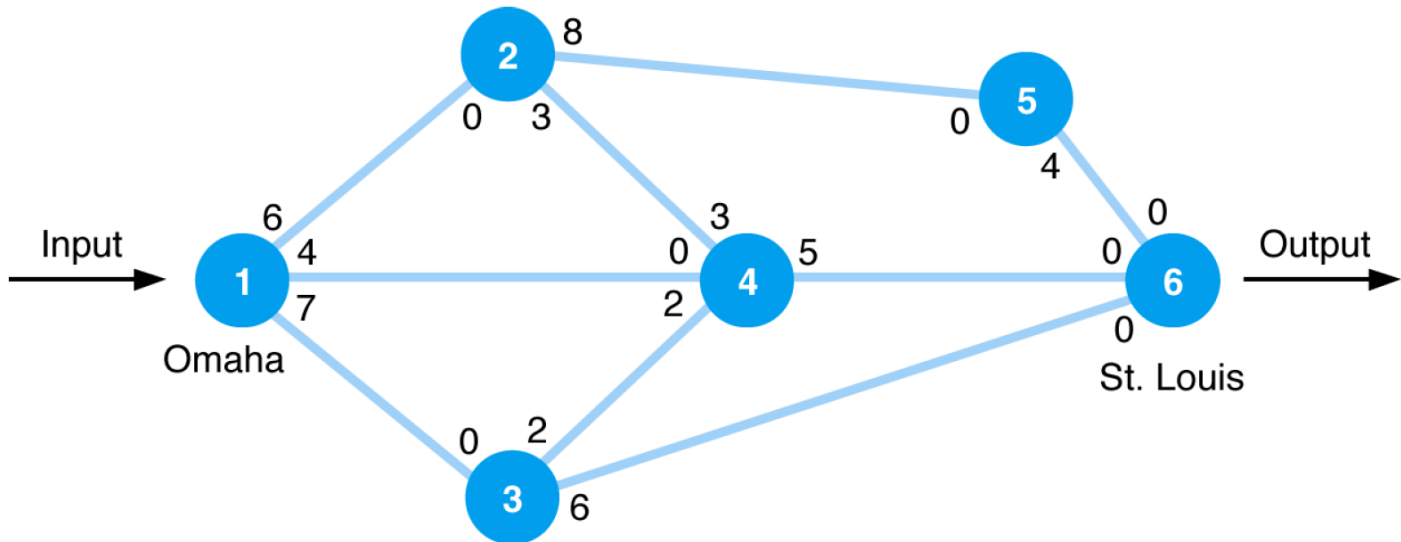


- **Node 1:** Lưu lượng vận chuyển tối đa từ node 1 đến node 2 (hay của edge 12) là 6, trong khi lưu lượng vận chuyển tối đa từ node 2 đến node 1 (hay của edge 21) là 0.
- Lưu ý rằng mặc dù đồ thị biểu diễn là *undirected* nhưng bản chất của network thực ra là *directed*.

The maximum flow problem - Algorithm

- 1 Chọn một đường (path) bất kì từ điểm nguồn (Input) đến đích (Output).
- 2 Điền lưu lượng cực đại vào path trên.
- 3 Điều chỉnh lưu lượng tối đại của mỗi node bằng cách trừ đi công suất cực đại bên trên.
- 4 Xóa đi đường dẫn (edge) có công suất là 0.
- 5 Quay lại bước 1 cho đến khi không còn đường dẫn nào đến đích.

The maximum Flow problem



① Chọn path 1256. The maximum flow là 4.

② ...

The Maximum Flow problem - LPP

Let's denote the flow from node i to node j by x_{ij} .

- Maximize $z = x_{12} + x_{13} + x_{14}$
- Constraints:
 - 1 Node 1: $x_{12} \leq 6, x_{13} \leq 7, x_{14} \leq 4$
 - 2 Node 2: $x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0, x_{23} \leq 3, x_{25} \leq 8$
 - 3 Node 3: $x_{13} - x_{34} - x_{36} = 0, x_{34} \leq 2, x_{36} \leq 6$
 - 4 Node 4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{46} = 0, x_{46} \leq 5$
 - 5 Node 5: $x_{25} - x_{56} = 0, x_{56} \leq 4$
 - 6 Node 6: $x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{36} + x_{46} + x_{56},$
 - 7 $x_{ij} \geq 0, x_{ij}$ are integers.

The Maximum Flow problem - LPP

Let's denote the flow from node i to node j by x_{ij} .

- Maximize $z = x$
- Constraints:
 - 1 Node 1: $x = x_{12} + x_{13} + x_{14}$, $x_{12} \leq 6$, $x_{13} \leq 7$, $x_{14} \leq 4$
 - 2 Node 2: $x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$, $x_{23} \leq 3$, $x_{25} \leq 8$
 - 3 Node 3: $x_{13} - x_{34} - x_{36} = 0$, $x_{34} \leq 2$, $x_{36} \leq 6$
 - 4 Node 4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{46} = 0$, $x_{46} \leq 5$
 - 5 Node 5: $x_{25} - x_{56} = 0$, $x_{56} \leq 4$
 - 6 Node 6: $x = x_{36} + x_{46} + x_{56}$,
 - 7 $x_{ij} \geq 0$, x_{ij} are integers.

The Maximum Flow problem - Solved by Excel

Objective—
maximize flow
from node 6

Constraint at
node 1;
 $= C15 - C6 - C7 - C8$

Decision
variables

Microsoft Excel - Exhibit7.8

File Edit View Insert Format Tools Data Window Help

Arial 10 B I U

C16 =C15

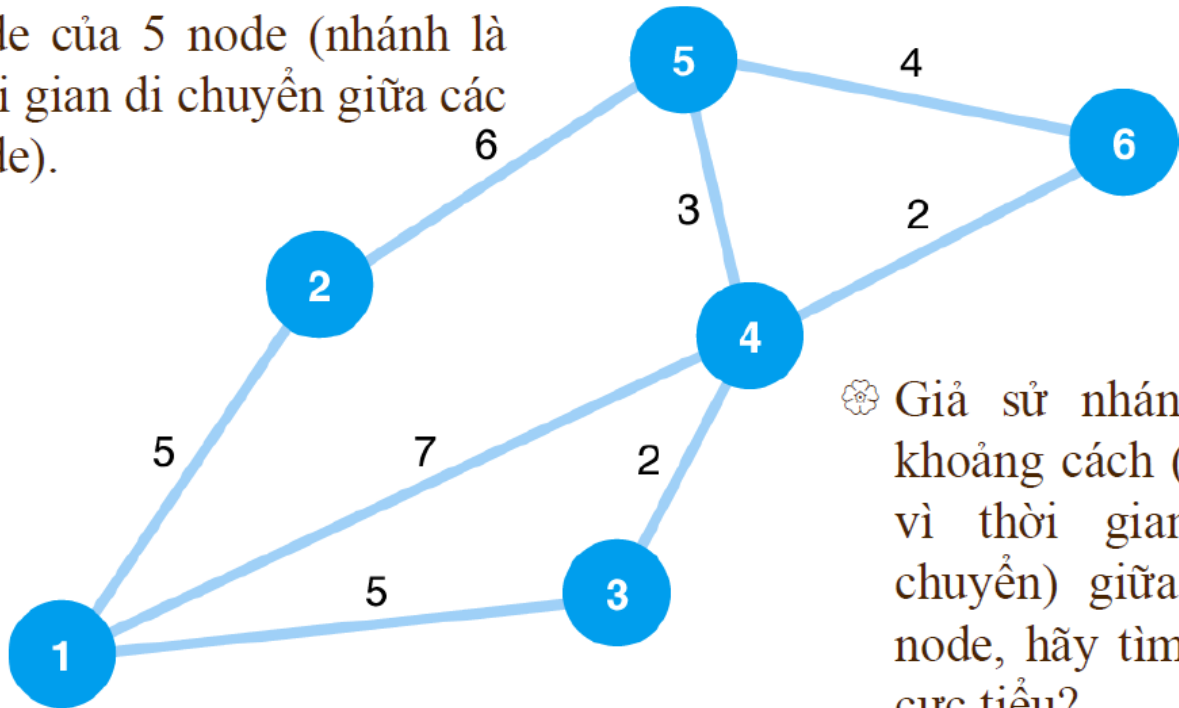
| Branch Nodes | Branch Flow | Branch Capacity | Node | Network Flow |
|--------------|-------------|-----------------|------|--------------|
| 1 2 | | 6 | 1 | 0 |
| 1 3 | | 7 | 2 | 0 |
| 1 4 | | 4 | 3 | 0 |
| 2 4 | | 3 | 4 | 0 |
| 2 5 | | 8 | 5 | 0 |
| 3 4 | | 2 | 6 | 0 |
| 3 6 | | 6 | | |
| 4 6 | | 5 | | |
| 5 6 | | 4 | | |
| 6 1 | | 17 | | |
| Total | 0 | | | |

The Maximum Flow problem - Applications

- 1 Maximize the flow through a company's distribution network from its factories to its customers.
- 2 Maximize the flow through a company's supply network from its vendors to its factories.
- 3 Maximize the flow of oil through a system of pipelines.
- 4 Maximize the flow of water through a system of aqueducts.
- 5 Maximize the flow of vehicles through a transportation network.

Exercises

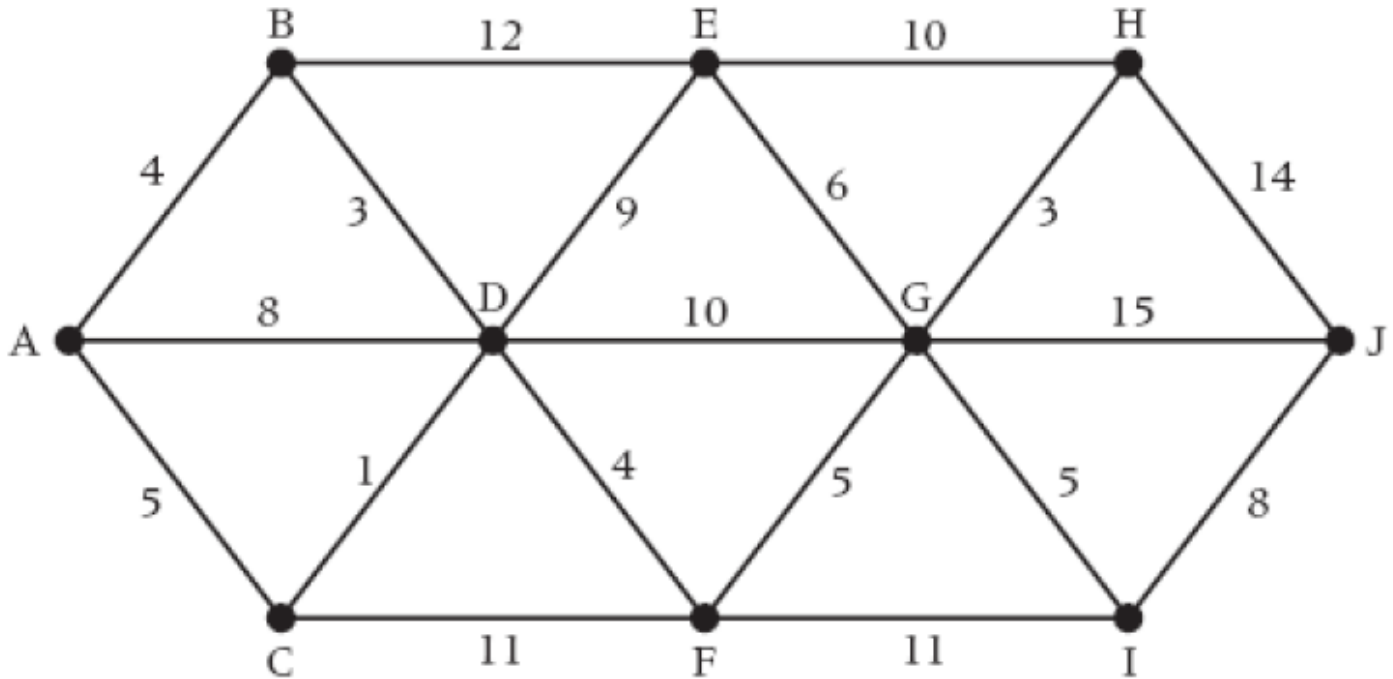
❁ Tìm đường đi ngắn nhất từ Atlanta (node 1) đến mỗi node của 5 node (nhánh là thời gian di chuyển giữa các node).



❁ Giả sử nhánh là khoảng cách (thay vì thời gian di chuyển) giữa các node, hãy tìm cây cực tiểu?

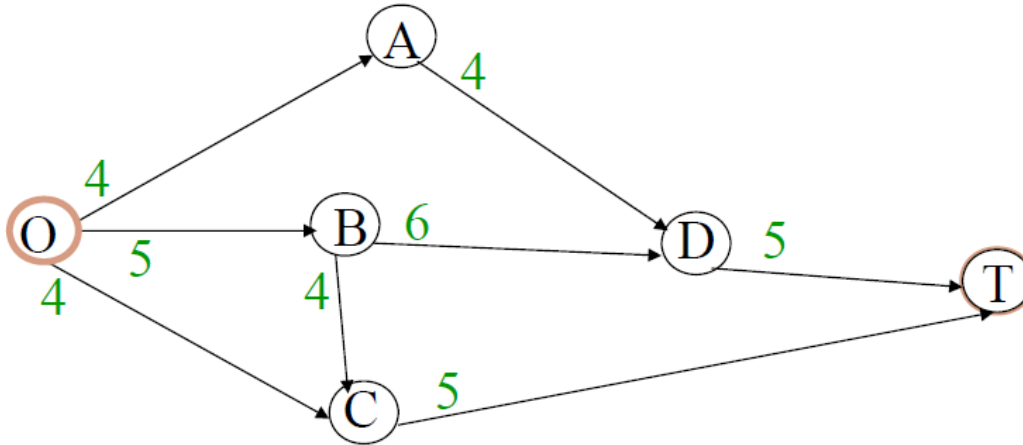
Exercises

Tìm đường đi ngắn nhất để đi từ A đến J.



Exercices

Cho sơ đồ mạng như hình vẽ



Từ điểm bắt đầu (O) hãy chuyển lượng hàng hóa lớn nhất có thể đến đích T?

Any question?

Thank you!